UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE
FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

APLIKÁCIE MATEMATIKY V PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOCH

Katarína Bušfyová

2010

UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

APLIKÁCIE MATEMATIKY V PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOCH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Školiteľ: Katarína Bušfyová

PaedDr. Lucia Rumanová, PhD. MABIb

Nitra, 2010

Čestné vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som bakalársku prácu s názvom ,,Aplikácie matematiky v prírodovedných predmetoch" spracovala samostatne a na základe uvedenej literatúry.

Nitra, 2010

....

podpis

Poďakovanie

Za odbornú pomoc a cenné rady, poskytnuté pri vypracovaní bakalárskej práce, ďakujem svojej školiteľke PaedDr. Lucii Rumanovej, PhD.

A tiež ďakujem svojim rodičom za trpezlivosť a výborné podmienky, ktoré mi poskytli.

ABSTRAKT

BUŠFYOVÁ, Katarína: Aplikácie matematiky v prírodovedných predmetoch. [Bakalárska práca]. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre. Fakulta prírodných vied. Školiteľ: PaedDr. Lucia Rumanová, PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: bakalár. Nitra : FPV, 2010. 41 s.

Cieľom bakalárskej práce je aplikovať matematiku v iných prírodovedných predmetoch. Ukázať, že spektrum jej využitia je široké a nesúvisí s matematikou iba ako s vedou samotnou. Prvá kapitola je rozčlenená na podkapitoly, ktoré sú venované jednotlivým predmetom - biológii, chémii, fyzike. Sú v nich uvedené aplikačné úlohy, ktoré sa dajú s pomocou využitia vedomostí z matematiky rýchlo a efektívne vypočítať. V druhej kapitole sa venujeme rôznym aplikáciám matematiky v spomenutých prírodovedných predmetoch, konkrétne pomôckam a metódam na uľahčenie vysvetľovania danej problematiky, biomatematike alebo využitiu logaritmov v biológii a chémii.

Kľúčové slová: Matematika. Aplikácie. Úlohy. Prírodovedné predmety. Motivácia.

ABSTRACT

BUŠFYOVÁ, Katarína: Application of mathematics in Scientific subjects. [Bachelor Thesis]. Constantine the Philosopher University in Nitra. Faculty of Natural Sciences. Supervisor: PaedDr. Lucia Rumanová, PhD. Degree of Qualification: Bachelor. Nitra : FNS, 2010. 41 p.

The purpose of the bachelor work is to apply mathematics in different kinds of scientific subjects. It is important to show that the spectrum of it's using is wide and it does not relate to mathematics only as a science. The first chapter is divided into subheads which are dedicated into particular subjects like biology, chemistry and physics. They include applicational tasks which can be used with a help of using mathematical knowledge and also it can be very effective and quickly calculated. In the second chapter, we addict any kind of different aplication of mathematics mentioned in scientific subjects, to be concrete, their instruments and methods are used for easier describing of given problematic area, biomathematics or using logarithmics in biology and chemistry.

Keywords: Mathematics. Aplications. Tasks. Motivation. Scientific subjects.

OBSAH

0 Úvod

,,Matematika vedie študentov k racionálnej práci, deduktívnemu spôsobu myslenia, k presnej a stručnej formulácii myšlienok i k osvojeniu si matematickej symboliky ako ďalšieho prostriedku vyjadrovania." [4]

V matematike sa musíme naučiť rešpektovať pravidlá, bez ktorých by sme veľa problémov nevyriešili. Musíme tiež systematicky pracovať, sústrediť sa na podstatné veci a v neposlednom rade kriticky zhodnotiť výsledky svojej práce. Všetky tieto zručnosti môžeme využiť v praxi, napr. môžeme selektovať podstatné informácie z väčšieho celku, ktoré nám ponúka televízia, noviny, internet....

Matematika má veľké uplatnenie aj v prírodovedných predmetoch, pretože pomocou nej sa dajú počítať jednoduché, ale i zložitejšie úlohy, ktoré by sme bez nej vypočítali len veľmi ťažko.

V bakalárskej práci sme sa preto venovali aplikačným úlohám v rôznych prírodovedných predmetoch. Všetky podkapitoly v prvej kapitole sú zamerané na konkrétne prírodovedecké predmety. Prvá podkapitola je venovaná biológii, pričom ťažiskom tejto kapitoly sú príklady, v ktorých nám matematika uľahčuje riešenie. Taktiež príklady obsahujú poznámky, v ktorých sa snažíme stručne vysvetliť použitie matematiky, v tom konkrétnom probléme. Ďalšie dve podkapitoly sú venované chémii a fyzike. Každá sa opiera o matematiku vo väčšej alebo menšej miere. Taktiež sú tam poznámky týkajúce sa vedomostí z danej matematickej problematiky. Druhá kapitola je o konkrétnych aplikáciách matematiky, nie v príkladoch, ale snažili sme sa predstaviť rôzne možnosti, spôsoby riešenia uvedených aplikačných úloh.

1 Aplikačné úlohy v prírodovedných predmetoch

1.1 *Biológia*

Príklad 1

Počet členov populácie baktérií označme *P(t)*. Ako určíme okamžitú rýchlosť *r* rastu spoločenstva baktérií? (Varga, 2006)

Riešenie:

Keďže sa jedná o živý organizmus, jedným zo základných prejavov života je schopnosť rozmnožovať sa. Z toho vyplýva, že sa v čase mení počet jedincov populácie baktérií či už narodením nových alebo odumieraním starých. Rýchlosť prírastku baktérií je daná podielom nových členov a času, za ktorý tento prírastok nastal. Rast populácie nie je rovnomerný, a preto potrebujeme priemernú rýchlosť rastu, aby sme sa čo najpresnejšie priblížili k výsledku. Definujme ju ako $\frac{\Delta P}{\Delta t}$. Zmena počtu jedincov populácie je daná rozdielom počtu baktérií v čase $t_0 + \Delta t$ a v čase t_0. Dostávame $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t}$. Potrebujeme zistiť prírastok baktérií za čo najkratší okamih, čiže $t \to 0$. Pri akom úkone môžeme počítať čas približujúci sa k nule? V limitách sa to dá, a preto pre okamžitý rast počtu členov spoločenstva baktérií platí $r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t}$.

Poznámka: Využili sme poznatky o limite funkcie, ktorá nám pomáha čo najlepšie sa priblížiť k danému intervalu, v ktorom chceme úlohu počítať. Za 0 sekúnd sa nezmení počet baktérií v populácií, ale priblížením sa k nule limitou dokážeme vypočítať, aká je zmena počtu. Preto využitie limity v tomto príklade je výhodné, bez použitia tejto metódy by sa počítal len veľmi ťažko.

Príklad 2

Rýchlosť zmeny *R* počtu ľudí infikovaných chrípkou v meste s 10 000 obyvateľmi je daná vzťahom *R = kN (10 000 – N)*, kde *k* je konštanta, *N* je počet chorých. Pri akom počte infikovaných ľudí je rýchlosť šírenia nákazy najväčšia? (Varga, 2006)

Riešenie:

Musíme nájsť globálne maximum funkcie $R = R(N)$.

Nájdeme ho pomocou prvej derivácie funkcie $R = kN(10\,000 - N)$ podľa N

$$R' = 10\,000k - 2kN$$

Tento výraz položíme rovný nule a zistíme, pre ktoré N má rovnica riešenie

$$0 = k(10\,000 - 2N)$$

$$N = 5\,000$$

Extrém táto funkcia nadobúda len pre $N_0 = 5\,000$.

Či je to maximum alebo minimum zistíme podľa druhej derivácie.

Vzhľadom na to, že $R''(N_0) < 0$, funkcia R nadobúda v tomto bode maximum.

Z toho vyplýva, že rýchlosť šírenia nákazy je najvyššia v momente, keď je chorých 5 000 ľudí.

Príklad 3

Množstvo lieku x v krvnom obehu pacienta je dané vzťahom $x(t) = \frac{200t}{t^2 + 16}\,mg$, kde t je čas v hodinách po užití lieku. Kedy je hladina lieku rastúca? Kedy je maximálna? Aké množstvo lieku vtedy telo pacienta obsahuje? (Varga, 2006)

Riešenie:

Na zistenie, či je funkcia rastúca alebo klesajúca nám slúži prvá derivácia. Ak je kladná, funkcia je rastúca a analogicky, keď je záporná, funkcia je klesajúca. Preto vypočítajme prvú deriváciu funkcie $x(t)$. Platí $x'(t) = \frac{3200 - 200t^2}{\left(t^2 + 16\right)^2}$, túto deriváciu položíme rovnú nule, aby sme získali stacionárne body: $0 = \frac{3200 - 200t^2}{\left(t^2 + 16\right)}$

$$0 = \frac{200\left(16 - t^2\right)}{\left(t^2 + 16\right)}$$

Dostávame $t = \pm 4$. Môžme vylúčiť záporný interval, pretože liek nepôsobí napríklad -3 hodiny. Ostáva nám preveriť interval $\langle 0, \infty)$

Na intervale $\langle 0, 4 \rangle$ je funkcia kladná, z čoho nám vyplýva, že na tomto intervale je funkcia rastúca. Na intervale $\langle 4, \infty)$ je táto funkcia záporná, čo nám značí klesajúcu funkciu.

Keďže nám do 4 hodín hodnoty rastú a potom začnú klesať, v čísle 4 je globálne maximum intervalu $\langle 0, \infty)$.

Z toho vyplýva, že maximálne množstvo lieku v krvnom obehu pacienta bude po 4 hodinách od jeho užitia.

Dosadíme do pôvodnej rovnice a vypočítame maximálne množstvo lieku v krvi pacienta:

$$x(t) = \frac{200.4}{4^2 + 16}$$

x(t) = 25 mg lieku

Poznámka: V príkladoch 2 a 3 nám uľahčili počítanie poznatky o derivácií funkcií a ich vzťah k maximám a minimám funkcií.

Derivácia ľubovoľnej funkcie je zmena (rast) tejto funkcie v pomere k veľmi malej zmene jej premennej, resp. premenných.

Ak je na danom intervale prvá derivácia kladná - funkcia je rastúca, ak je záporná – funkcia je klesajúca.

Ak je v určitých bodoch prvá derivácia nulová a druhá derivácia je kladná (záporná), potom v tomto bode funkcia nadobúda minimum (maximum).

Príklad 4

Prúdenie krvi *F* závisí od polomeru cievy *r* a podľa vzťahu $F = kr^4$, kde *k* je istá konštanta. Nájdite rýchlosť zmeny prietoku krvi (v %) v závislosti od percentuálnej zmeny polomeru cievy. Interpretujte tento výsledok.

Riešenie:

Zo vzťahu $F = kr^4$ nám vyplýva, že pre rýchlosť zmeny prietoku krvi platí $\frac{\Delta F}{\Delta t} = 4kr^3 \frac{dr}{dt}$.

Potrebujeme percentuálnu zmenu, preto tento výraz predelíme celkovým prietokom krvi.

Dostávame: $\dfrac{\frac{dF}{dt}}{F} = \dfrac{4kr^3 \frac{dr}{dt}}{F} = \dfrac{4kr^3 \frac{dr}{dt}}{kr^4} = 4\dfrac{\frac{dr}{dt}}{r}$.

Tento výsledok interpretujeme takto:

Ak pacient užije liek, ktorý spôsobí 10% nárast polomeru cievy, tento liek zabezpečí 40% zvýšenie prietoku krvi. (Varga, 2006)

Príklad 5

Predpokladajme, že strom počas rastu nemení svoju geometrickú podobu a množstvo svetla dopadajúce na jednotku jeho povrchu je konštantné. Energia, ktorú získava fotosyntézou sa spotrebuje na zabezpečenie fotosyntézy, rast stromu a transport živín do celej rastliny. Do akej výšky môže tento strom narásť?

Riešenie:

Nech $y = y(t)$ je výška stromu, ktorá je funkciou času t. Keďže strom nemení geometrickú podobu, možno pomocou y^2 resp. y^3 a vhodných konštánt vyjadriť obsah zelených častí stromu, resp. jeho objem.

Všetka energia stromu E sa vytvorí pri fotosyntéze, t. j. priamo úmerne závisí od obsahu zelenej časti stromu, preto $E = \alpha . y^2$. Táto energia sa spotrebuje na:

(i) energiu E_F potrebnú na samotný priebeh fotosyntézy, t. j. $E_F = \beta . y^2$

(ii) energiu E_T potrebnú na transport živín z koreňov do celej rastliny, táto je úmerná objemu stromu a výške stromu, t. j. $E_T = \gamma .\, y^3 . y = \gamma .\, y^4$

(iii) energiu E_R potrebnú na rast, táto je úmerná rýchlosti rastu stromu (derivácii hmotnosti stromu m podľa času t, pričom m je úmerná objemu), t. j. $E_R = \delta \dfrac{dm}{dt} = \delta \dfrac{d\left(\lambda y^3\right)}{dt} =$

$= 3\, \delta\lambda\, y^2 \dfrac{dy}{dt}$.

Zo zákona zachovania energie vyplýva $\alpha\, y^2 = \beta\, y^2 + \gamma\, y^4 + 3\, \delta\lambda\, y^2 \dfrac{dy}{dt}$. Po predelení výrazom $3\, \delta\lambda\, y^2$ a označení $a = \dfrac{\alpha - \beta}{3\delta\lambda}$, $b = \dfrac{\gamma}{3\delta\lambda}$ dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dy}{dt} = a - b\, y^2.$$

Jej riešením je funkcia $y(t) = \sqrt{\dfrac{a}{b}} tgh\left(\sqrt{ab} t\right)$. Táto funkcia je rastúca a súčasne zhora ohraničená.

To znamená, že pre maximálnu výšku stromu platí $y_{MAX} = \lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \sqrt{\dfrac{a}{b}} tgh\left(\sqrt{ab} t\right)$.

(Vrábel a kol., 1991)

Poznámka: Príklady 4 a 5 sme počítali s využitím diferenciálnych rovníc (rovnice, v ktorých ako premenné vystupujú derivácie funkcií). Presnejšie separovateľnými diferenciálnymi rovnicami. Ich všeobecný zápis je: $p(x)q(y)+r(x)s(y)=0$ Prenásobením výrazom $\frac{1}{q(y)r(x)}$ dostávame jednoduchú separovanú diferenciálnu rovnicu $A(x)dx+B(y)dy=0$, $A(x)=\frac{p(x)}{r(x)}$, $B(y)=\frac{s(y)}{q(y)}$, Následným zintegrovaním dostávame rovnicu, ktorá už nie je diferenciálna. Z nej dopočítame výsledok.

Príklad 6

Predpokladajme, že epidémia sa šíri rýchlosťou *f(t)* a a) 3 ľudia, b) 3*t* ľudí, c) $3t^2$ ľudí je infikovaných za týždeň. Koľko ľudí sa nakazí za mesiac? (Varga, 2006)

Riešenie:

V zadaní nám vystupujú týždne aj mesiac, tak si časový interval jedného mesiaca rozdelíme do štyroch týždňov: $(0,4\rangle$.

Počet ľudí infikovaných za 4 týždne:

a) $s = \int_0^4 3 \; dt$ *b)* $s = \int_0^4 3t \; dt$ *c)* $s = \int_0^4 3t^2 \; dt$

$s = [3.4 - 3.0]$ $s = \left[\frac{3}{2}.4^2 - \frac{3}{2}.0^2\right]$ $s = \left[\frac{3}{3}.4^3 - \frac{3}{3}.0^3\right]$

$s = 12$ $s = 24$ $s = 64$

Za mesiac sa nakazí a) 12 ľudí, b) 24 ľudí, c) 64 ľudí .

Poznámka: Určitý integrál je na rozdiel od neurčitého integrálu, ktorý je v podstate množina funkcií, číslo. Vzťah medzi nimi vyjadruje Newton – Leibnitzova veta. Matematický zápis tejto vety je: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Veľmi často sa určité integrály počítajú pomocou tzv. „tabuľkových integrálov“, ktoré sme použili aj v tomto príklade.

Príklad 7

Pacient musí užívať 100 mg lieku denne. Jeho organizmus každý deň eliminuje 20% lieku

a) odhadnite dlhodobú hladinu lieku v tele pacienta,
b) dlhodobá hladina lieku v organizme pacienta je 200 mg. Telo pacienta dokáže eliminovať každý deň 25% lieku. Aká je denná dávka? (Varga, 2006)

Riešenie:

a) Prvý deň sa v tele pacienta nachádza 100 mg lieku.

Druhý deň: 100 + 100. 0,8 mg lieku (druhá dávka + zostatok z predošlého dňa).

Tretí deň: 100 + (100 + 100. 0,8). 0,8 = 100 + 100.0,8 + 100. 0,8. 0,8 mg

...

n-tý deň: 100 + 100.0,8 + 100. $0{,}8^2$ + 100. $0{,}8^3$ + ... + 100. $0{,}8^n$ mg lieku.

Vidíme, že nám vznikol geometrický rad, ktorého súčet vypočítame pomocou vzorca $S = \frac{a_0}{1-q}$, kde musí platiť $|q| < 1$. Podmienka je splnená, pretože q = 0,8.

Preto dlhodobá hladina tohto lieku v organizme je $S = \frac{100}{1-0{,}8} = 500mg$.

b) Dennú dávku lieku označme a. Z prvej časti vyplýva, že platí $200 = \frac{a}{1-0{,}75}$. Denná dávka lieku je preto 25 mg.

Poznámka: Keďže sa hodnota *n*-tého člena rovná *q*-násobku predchádzajúceho člena, pričom q je pomer dvoch za sebou idúcich členov, využili sme v tomto príklade súčet nekonečného geometrického radu. q nazývame kvocient, pre ktorý platí $|q| < 1$.

Súčet nekonečného geometrického radu vypočítame pomocou vzťahu $S = \frac{a_0}{1-q}$, kde S je súčet radu, a_0 je prvý člen tohto radu.

Príklad 8

Talasemia je druh ľudskej anémie, často sa vyskytujúci v mediteránnej (stredomorskej) populácií; u iných populácií sa vyskytuje vzácne. Táto choroba má dve formy: minor (ľahšiu) a major (vážnu). Vážne postihnutí jedinci sú homozygotní (TT), menej postihnutí sú heterozygotní (Tt).

a) Muž s talasemiou minor sa oženil so zdravou ženou. Budú mať deti postihnuté talasemiou minor a s akou pravdepodobnosťou sa im narodí zdravé dieťa?

b) Otec aj matka trpí talasemiou minor. Aká je pravdepodobnosť, že ich dieťa bude postihnuté vážne? Môžu mať zdravé dieťa?

c) Ak uzavrú manželstvo dve osoby s talasemiou, aká je pravdepodobnosť, že prvé dieťa bude mať chorobu v prvom alebo druhom stupni? (Malachová, Dobiáš, 1998)

Riešenie:

V biológií sa používajú veľké a malé písmená na označenie znakov, z ktorých sa následne skladajú alely. Napr.: Talasemia minor má znak *T* aj *t* a vzniká z nej alela *Tt*. Vo väčšine príkladov znak označený veľkým písmenom (*T*) je nadradený nad znak označený malým písmenom (*t*).

V tomto príklade sa nám oba znaky prejavujú s rovnakou silou a preto ľudia s *TT* aj *Tt* majú talasemiu, ale nie sú rovnaké.

V zadaní máme označenie pre obe talasémie, ale nemáme označenie pre zdravého jedinca. Ostáva nám *tt* a preto alela *tt* označuje zdravého jedinca.

a) *P: Tt(muž) x tt(žena)*

G_p: *T,t ; t*

F_1: *Tt, tt, tt, tt*

Postihnuté bude 1 zo 4 detí.

Zdravé dieťa : $\frac{tt}{v\check{s}etci} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$

Zdravé dieťa sa im narodí so 75% pravdepodobnosťou.

b) *P: Tt x Tt*

G_p: *T,t ; T,t*

F_1: *TT, Tt, Tt, tt*

Postihnuté vážne: $\frac{TT}{v\check{s}etci} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Pravdepodobnosť vážneho postihnutia je 25%.

Keďže sa v F_1 generácii vyskytla alela *tt*, môže sa im narodiť zdravé dieťa.

c) Talasemia nie je zadaná presnejšie, a preto dostávame štyri prípady:

i) *P: TT (muž) x TT (žena)*

G_p: *T ; T*

F_1: *TT, TT, TT, TT*

Prvé dieťa bude talasemické so 100% pravdepodobnosťou.

ii) *P: TT (muž) x Tt(žena)*

G_p: *T ; T,t*

F_1: *TT, TT, Tt, Tt*

Prvé dieťa bude talasemické so 100% pravdepodobnosťou.

iii) *P: Tt (muž) x TT (žena)*

G_p: *T, t ; T*

F_1: *TT, TT, Tt, Tt*

Prvé dieťa bude talasemické so 100% pravdepodobnosťou.

iv) *P: Tt (muž) x Tt (žena)*

G_p: *T, t ; T*

F_1: *TT, Tt, Tt, tt*

Dieťa s talasémiou: $\frac{TT+Tt}{v\check{s}etci} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$

Prvé dieťa bude talasemické so 75% pravdepodobnosťou.

Príklad 9

Normálne videnie u ľudí (D) je dominantným nad farbosleposťou (d).

a) Aká je pravdepodobnosť narodenia farboslepého dieťaťa manželom, kde je žena farboslepá a muž normálne vidiaci?

b) Aká je pravdepodobnosť, že sa normálne vidiacim manželom narodí farboslepé dieťa?

Riešenie:

Keď je daný znak dominantný, znamená to, že ak sa vyskytne v hocijakej alele, prejaví sa a zatlačí recesívny znak do úzadia.

a) Dostávame dve možnosti:

i) *P: DD (muž) x dd (žena)*

G_p: *D ; d*

F_1: *Dd, Dd, Dd, Dd*

Farboslepé dieťa: $\frac{dd}{v\check{s}etci} = \frac{0}{4} = 0\,\%$

Určite sa im nenarodí farboslepé dieťa.

ii) *P: Dd (muž) x dd (žena)*

G_p: *D,d ; d*

F_1: *Dd, Dd, dd, dd*

Farboslepé dieťa: $\frac{dd}{všetci} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$

Pravdepodobnosť narodenia farboslepého dieťaťa je 50%.

b) Dostávame štyri možnosti:

i) *P: DD (muž) x DD (žena)*

G_p: *D ; D*

F_1: *DD, DD, DD, DD*

Farboslepost': $\frac{dd}{všetci} = \frac{0}{4} = 0\%$

ii) *P: DD (muž) x Dd (žena)*

G_p: *D ; D,d*

F_1: *DD, DD, Dd, Dd*

Farboslepost': $\frac{dd}{všetci} = \frac{0}{4} = 0\%$

iii) *P: Dd (muž) x DD (žena)*

G_p: *D,d ; D*

F_1: *DD, DD, Dd, Dd*

Farboslepost': $\frac{dd}{všetci} = \frac{0}{4} = 0\%$

iv) *P: Dd(muž) x Dd (žena)*

G_p: *D,d ; D,d*

F_1: *DD, Dd, Dd, dd*

Farboslepost': $\frac{dd}{všetci} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

Príklad 10

Manželia, obaja s krvnou skupinou *A*, čakajú dieťa. Aká je pravdepodobnosť, že ich dieťa bude mať krvnú skupinu *A*?

Riešenie:

Máme štyri možnosti skombinovania gamét rodičov:

i) *P*: $I^A\ I^A$ *(muž) x* $I^A\ I^A$ *(žena)*

G_P: I^A ; I^A

F_1: $I^A\ I^A$

Krvná skupina A: $\frac{I^A I^A + I^A i}{všetci} = \frac{1}{1} = 1 = 100\%$

ii) *P: $I^A I^A$ (muž) x $I^A i$ (žena)*

G_P: I^A ; $I^A i$

F_1: $I^A I^A$, $I^A i$

Krvná skupina A: $\frac{I^A I^A + I^A i}{všetci} = \frac{2}{2} = 1 = 100\%$

iii) *P: $I^A i$ (muž) x $I^A I^A$ (žena)*

G_P: I^A,i ; I^A

F_1: $I^A I^A$, $I^A i$

Krvná skupina A: $\frac{I^A I^A + I^A i}{všetci} = \frac{2}{2} = 1 = 100\%$

iv) *P: $I^A i$(muž) x $I^A i$ (žena)*

G_P: I^A, i ; I^A, i

F_1: $I^A I^A$, $I^A i$, $I^A i$, ii

Krvná skupina A: $\frac{I^A I^A + I^A i}{všetci} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$

Poznámka: V genetike sa veľmi často využíva pravdepodobnosť a štatistika (posledné tri príklady). Takisto sa využíva pri skúmaní genetických vlôh pre vznik rôznych genetických ochorení plodu v maternici, kedy z genetickej výbavy rodičov vie doktor zistiť, či bude mať dieťa nejakú dedičnú chorobu, alebo je možnosť výskytu tejto choroby minimálna.

V pravdepodobnosti sa využíva vzťah: percento úspešnosti sa rovná počtu priaznivých výsledkov vydelenými počtom všetkých možností.

Štatistiku využíva genetika napr. pri výpočte χ kvadrátu. Ten vychádza z frekvenčnej tabuľky a testuje nulovú štatistickú hypotézu, ktorá tvrdí, že početnosť v jednotlivých kategóriách sa rovná očakávaným (teoretickým) početnostiam.

1.2 *Chémia*

Príklad 1

Spájka obsahuje meď aj zinok. Koľko medi a zinku obsahuje 60 cm^3 spájky s hmotnosťou 485 g? (Merná hmotnosť medi je 8,7 g/ cm^3 zinku 6,86 g/ cm^3.) (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Meď	Zinok
množstvo...... x [cm^3]	množstvo…..$(60 – x)$ [cm^3]
hmotnosť…..$8,7.x$ [g]	hmotnosť…..$(60 – x).\ 6,86$ [g]

Stačí nám zostaviť jednoduchú lineárnu rovnicu o jednej neznámej a dopracujeme sa k výsledku: hmotnosť medi + hmotnosť zinku = hmotnosť spájky.

$$8,7 \,.\, x + (60 – x) \,.\, 6,86 = 485$$

$$8,7 \,.\, x + 411,6 – 6,86\, x = 485$$

$$1,84\, x = 73,4$$

$$x = 39,891$$

V spájke je približne 40 cm^3 medi a 20 cm^3 zinku.

Príklad 2

Morská voda obsahuje 5% soli. Koľko kg sladkej vody treba priliať k 40 kg morskej vody, aby obsah soli zostal 2% ? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Množstvo priliatej vody.......x kg

5% soli v 40 kg morskej vody .... $\frac{5}{100}$. 40 kg

2% soli v $(40 + x)$ kg morskej vody ..... $\frac{2}{100} \,.\, (40 + x)$

Zostavíme zmiešavaciu rovnicu:

$$\frac{5}{100} \,.\, 40 = \frac{2}{100} \,.\, (40 + x)$$

$$5.\ 40 = 2.\ (40 + x)$$

$$200 = 80 + 2x$$

$x = 60$

Do morskej vody treba priliať 60 kg sladkej vody.

Príklad 3

Máme 1500 g 7,2% roztoku kuchynskej soli vo vode. Varením tohto roztoku sa odparí časť vody a zostane 1200 g nového roztoku.

a) Koľko percentný je nový roztok?
b) Koľko g kuchynskej soli musíme pridať do nového roztoku aby sme z neho získali 25% roztok?

Pozn.: p - percentný roztok kuchynskej soli vo vode znamená: Ak máme napr. 100 g roztoku, je v ňom p g kuchynskej soli a (100 – p) g vody. (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

a) V 1500 g pôvodného roztoku je:

$$\frac{1500}{100} \cdot 7{,}2 = 108 \text{ (g soli)}$$

V 1 200 g nového roztoku je:

$$108 : \frac{1200}{100} = 9 \quad \Rightarrow \quad \text{Nový roztok je 9\%.}$$

b) Pridáme x g soli

Hmotnosť roztoku...... *1 200 + x*

Hmotnosť soli............. *108 + x*

Získali sme 25% roztok, platí rovnosť:

$$(108 + x) : \frac{1200 + x}{100} = 25$$

$$(108 + x) \cdot \frac{100}{1200 + x} = 25$$

$$x = 256 \,.\ (x \neq -1\,200)$$

Do roztoku treba pridať 256 g soli. Získaný roztok má 1456 g.

Poznámka: V príkladoch 1 - 3 sme využili počítanie jednoduchých rovníc o jednej neznámej na dosiahnutie výsledku. Ťažiskom tejto metódy je porovnávanie ľavej a pravej strany. Popritom sa využívajú ekvivalentné úpravy, a to pričítanie toho istého čísla obom stranám a vynásobenie oboch strán tým istým číslom rôznym od nuly. V treťom príklade nám vyšiel aj záporný výsledok, ale keďže nemôže byť hmotnosť záporné číslo, druhé riešenie rovnice nie je v tomto príklade použiteľné.

Príklad 4

Koľko atómov medi je v 20g Cu? Relatívna atómová hmotnosť medi $(A_r)_{Cu}$= 63,546. (Šípek, 1974)

Riešenie:

1 mol medi (63,546g Cu) obsahuje 6,023. 10^{23} atómov medi.

Obsah atómov v 20g Cu vypočítame pomocou priamej úmery:

63,546g Cu......................... 6,023. 10^{23} atómov

20g Cu................................*x* atómov

$$x = \frac{6{,}023.10^{23}.20}{63{,}546} = 1{,}895.10^{23}$$

V 20g medi je 1,895. 10^{23} atómov Cu.

Príklad 5

Vypočítajte:

a) Koľko g vápnika, uhlíka a kyslíka obsahuje 5g uhličitanu vápenatého $CaCO_3$,

b) Aké je percento zastúpenia jednotlivých prvkov v $CaCO_3$.

$(A_r)_C$ = 12,011 15; $(A_r)_{Ca}$ = 40,08; $(A_r)_O$ = 15,999 4 (Šípek, 1974)

Riešenie:

a) $(M_r)_{CaCO_3}$ = $(A_r)_{Ca}$ + $(A_r)_C$ + 3$(A_r)_O$

= 40,8 + 12, 011 15 + 3. 15,999 4

= 100,9

100,9 (1 mol) $CaCO_3$ obsahuje 40,8 g vápnika, 12,011 15g uhlíka a 47,999 4 g kyslíka.

5 g $CaCO_3$ obsahuje :

$$\frac{40{,}08}{100{,}09} . 5 = 2\text{g Ca}$$

$$\frac{12{,}01115}{100{,}09} . 5 = 0{,}6\text{g C}$$

$$\frac{47{,}9982}{100{,}09} . 5 = 2{,}4\text{g O}$$

b) 100,09g $CaCO_3$ .... 100% $x = \frac{40,08.100}{100,09} = 40\%$

<u>40,08g Ca .... x%</u>

100,09g $CaCO_3$ ....100% $x = \frac{12,01115.100}{100,09} = 12\%$

<u>12,011 15g C ....x%</u>

100,09g $CaCO_3$ ....100% $x = \frac{47,9982.100}{100,09} = 48\%$

47,8882g O ....x%

5g uhličitanu vápenatého obsahuje 2g (40% hmotn. %) vápnika, 2,4g (48 hmotn. %) kyslíka a 0,6g (12 hmotn. %) uhlíka.

Poznámka: V príkladoch 4 a 5 sme využili priamu úmeru. Vyjadruje závislosti medzi veličinami a využíva princíp: koľkokrát sa zväčší (zmenší) jedna veličina, toľkokrát sa zväčší (zmenší) druhá veličina od nej závislá.

Príklad 6

Pri zmiešaní 6 l jedného druhu liehu so 4 l iného druhu liehu dostaneme 52% lieh; pri zmiešaní 4 l prvého druhu liehu s 5 l druhého druhu dostaneme 45% lieh. Koľko percentný je každý z obidvoch druhov liehu? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Prvý druh liehu..... *x*% druhý druh liehu....... *y*%

6 l .... $6.\frac{x}{100}$ čistého liehu 4 l .... $4.\frac{y}{100}$ l čistého liehu

Spolu .... $10.\frac{52}{100}$ l čistého liehu

Dostávame rovnicu : $6.\frac{x}{100} + 4.\frac{y}{100} = 10.\frac{52}{100}$

analogicky v druhom prípade dostávame rovnicu: $4.\frac{x}{100} + 5.\frac{y}{100} = 9.\frac{45}{100}$

Vznikla nám sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi

Vynásobíme obe stovkou aby sme odstránili zlomky.

$6x + 4y = 520$

$\underline{4x + 5y = 405}$

$30x + 20y = 2600$

$\underline{-16x - 20y = -1620}$

$14x = 980$

$x = 70 \longrightarrow 30 . 70 + 20y = 2600$

$20y = 500$

$y = 25$

Prvý druh liehu je 70%, druhý druh je 25%.

Príklad 7

Koľko 20% a 45% kyseliny sírovej (H_2SO_4) musíme zmiešať, aby sme získali 250 ml 35% H_2SO_4? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Ak je x ml 20% kyseliny sírovej a y ml 45% H_2SO_4, potom platí rovnica:

$x + y = 250$

x ml 20% H_2SO_4 .... $\frac{x}{100}.20$ ml čistej H_2SO_4

y ml 45% H_2SO_4 .... $\frac{y}{100}.45$ ml čistej H_2SO_4

250 ml 35% H_2SO_4........ $\frac{35}{100}. 250$ ml čistej H_2SO_4.

Dostávame rovnicu: $\frac{20}{100}x + \frac{45}{100}y = \frac{35}{100}. 250$

Vznikne nám sústava dvoch rovníc s dvoma neznámymi:

$x + y = 250$

$\underline{\frac{20}{100}x + \frac{45}{100}y = \frac{35}{100}. 250}$

$x + y = 250$

$\underline{4x + 9y = 1750}$

$y = 250 - x$

$4x + 9(250 – x) = 1\,750$

$4x + 2\,250 – 9x = 1\,750$

$500 = 5x$

$100 = x$

$y = 250 – x$

$y = 150$

Musíme zmiešať 100 ml 20% a 150 ml 45% H_2SO_4.

Poznámka: Pri výpočte šiesteho a siedmeho príkladu sme použili jednoduché sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych. Hľadaním koreňov vyhovujúcim obom rovniciam súčasne nazývame riešením sústavy rovníc. Jediná dvojica koreňov sústavy existuje, ak si rovnice navzájom neodporujú alebo nie sú lineárne závislé. Pri riešení sústavy sa snažíme dostať z daných rovníc sústavy jednu rovnicu s jednou neznámou.

V šiestom príklade sme použili sčítaciu metódu, pri ktorej sčítaním dvoch rovníc (vynásobíme rovnicu nenulovým číslom tak, aby pri sčítaní týchto rovníc jedna neznáma vypadla) dostanem jednu rovnicu s jednou neznámou. Dosadením výsledku do ľubovoľnej rovnice vypočítam aj druhú neznámu.

V siedmom príklade sme použili tzv. dosadzovaciu metódu, t. j. z jednej rovnice si vyjadríme jednu neznámu pomocou druhej a dosadíme do druhej rovnice. Dostaneme jednu rovnicu s jednou neznámou. Výsledok dosadíme do ktorejkoľvek rovnice a dopočítame druhú neznámu.

Príklad 8

Máme 3g rádioaktívneho prvku s polčasom rozpadu 7 rokov a 24 g iného rádioaktívneho prvku. Aký je polčas rozpadu T_2, ak za 21 rokov sa ich množstvá rovnajú? (Križalkovič a kol., 1971, s. 338)

Riešenie:

Pre rádioaktívny rozpad platí vzťah: $m = M.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, kde M je množstvo prvku, T je polčas rozpadu, t je čas rozpadu a m je množstvo prvku po rozpade.

Pre prvý prvok platí: $m = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{7}}$

Pre druhý prvok platí: $m = 24.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{T_2}}$

Pretože po rozpade sa ich množstvá rovnajú, platí:

$$3.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{7}} = 24.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21}{T_2}} \longrightarrow \frac{24}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{21(T_2-7)}{7.T_2}} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3(T_2-7)}{T_2}} \longrightarrow$$

$3.(T_2 - 7) = -3\,T_2 \longrightarrow T_2 = 3{,}5$

Polčas rozpadu druhého prvku je 3,5 roka.

Poznámka: V tomto príklade sme použili exponenciálne rovnice. Sú to rovnice, ktoré majú neznámu v exponente. Príklad sme riešili tak, že sme si všetky mocniny v rovnici upravili na rovnaký základ, teda na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Keďže $a > 0$, $a \neq 1$, táto rovnica je ekvivalentná s rovnicou *f(x) = g(x)*. Z tejto rovnice sme sa už jednoduchými výpočtami dopracovali k výsledku.

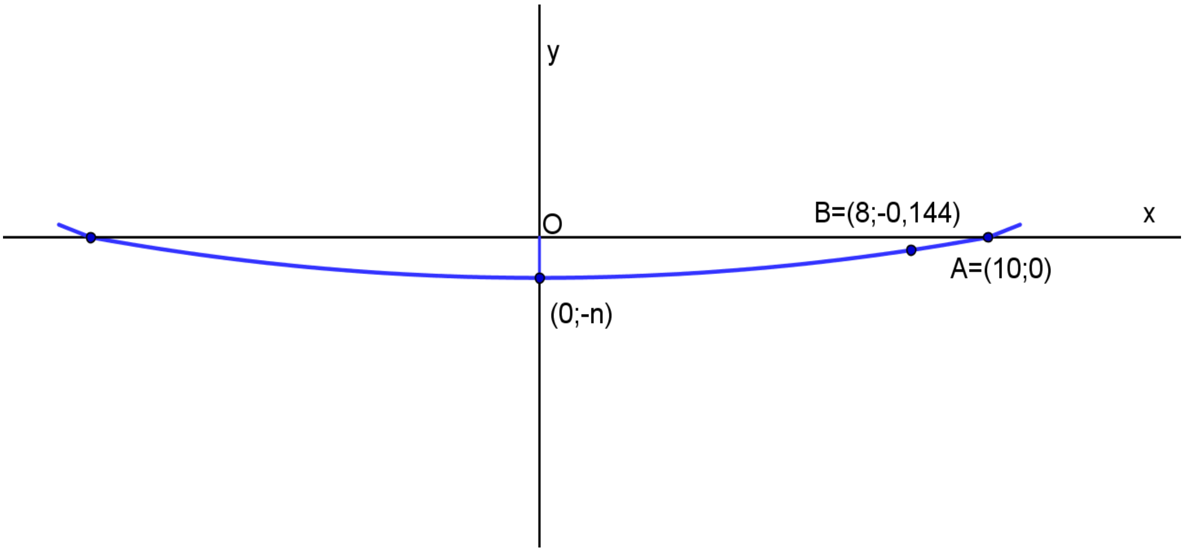
1.3 *Fyzika*

Príklad 1

V bodoch s rovnakou výškou nad vodorovnou rovinou, ktorých vzdialenosť od seba je 20 m, je zavesený oceľový trám. Pod vplyvom svojej hmotnosti je trám parabolicky prehnutý. Vo vzdialenosti 2 m od bodov upevnenia je jeho prehyb 14,4 cm pod úrovňou bodov upevnenia. Aký veľký je prehyb v jeho strede? (Parízek a kol., 1985)

Riešenie:

Vrchol paraboly umiestnime do bodu (0; -n), kde *n* je veľkosť maximálneho prehybu (obr.1).



Obrázok 1: parabola

Všeobecná rovnica paraboly je $y = ax^2 + bx + c$

Stred sme umiestnili do začiatku súradnicovej sústavy, a to nám zjednoduší rovnicu paraboly o lineárny člen. Preto všeobecná rovnica našej paraboly má predpis: $y = ax^2 + c$

Body *A* a *B* ležia na parabole. Z toho vyplýva, že musia spĺňať rovnicu paraboly.

Po dosadení nám vznikla sústava dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych:

$$0 = 100a + c$$

$$\underline{-0,144 = 64a + c\quad}$$

$$0,144 = 36a$$

$$a = 0,004 \longrightarrow c = -100a$$

$$c = -100.\,0,004$$

$c = - 0,4$

Rovnica paraboly je: $y = -0,004x^2 – 0,4$

Dosadíme súradnice prehybu : $n = - 0,004.x – 0,4$

$n = - 0,4$

Maximálny prehyb trámu je 0,4 m, čo je 40 cm.

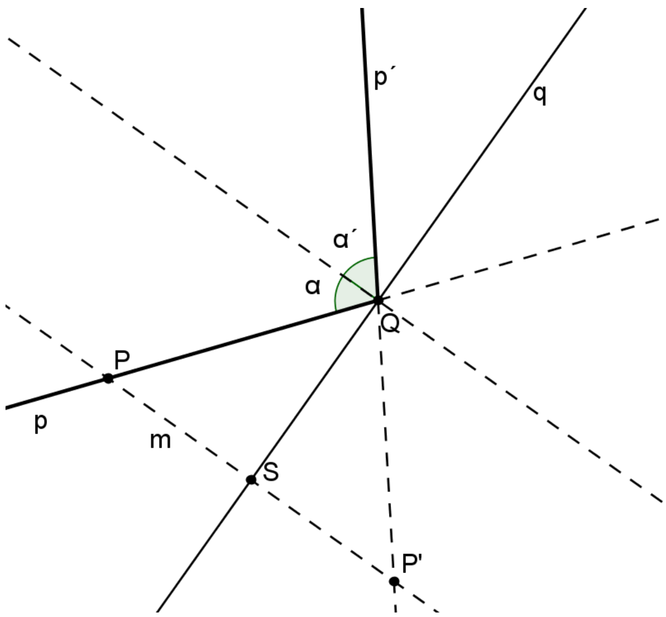
Poznámka: Všeobecná rovnica paraboly je $y = ax^2 + bx + c$. Pre zjednodušenie výpočtov, je veľmi výhodné umiestniť stred paraboly do počiatku súradnicovej sústavy. Ak nejaký bod leží na parabole, musí spĺňať aj jej rovnicu. Túto vlastnosť sme využili pri vypočítaní rovnice a dokonca aj pri dopočítaní maximálneho prehybu.

Príklad 2

Svetelný lúč leží na priamke p : $x- 2y+ 5 = 0$ s odráža sa od priamky q : $3x- 2y+ 7= 0$ v bode Q. Napíšte rovnicu priamky, na ktorej leží odrazený lúč.

Riešenie:

Pri odraze lúča sa uhol dopadu rovná uhlu odrazu.



Obrázok 2: Odrazený lúč

Z obrázku je zrejmé, že odrazený lúč leží na priamke $p´$ určenej bodmi $\overleftrightarrow{P´Q}$, kde $P´$ je súmerne združený bod podľa priamky q s ľubovoľne zvoleným bodom P na priamke p.

Zvoľme napríklad $y_p = 0$, potom $P = (-5; 0)$.

Veďme bodom P kolmicu m na priamku q. Pretože smernica priamky q je $k_q = \frac{3}{2}$, platí $k_m = -\frac{2}{3}$ a $m: y = -\frac{2}{3}(x+5)$.

Ak $S(x; y)$ je priesečník priamok m a p, potom platí:

$$y = -\frac{2}{3}(x+5)$$

$$\underline{3x - 2y + 7 = 0}$$

$$3x + \frac{4}{3}(x+5) + 7 = 0$$

$$x = -\frac{41}{13}\ ;\ y = -\frac{16}{13}$$

Teda

$S = \left(\frac{-41}{13}, \frac{-16}{13}\right)$. Pre bod S platí: $x_s = \frac{x_p + x_{p'}}{2}$ $\quad y_s = \frac{y_p + y_{p'}}{2}$,

z toho vyplýva

$$x_{p'} = 2x_s - x_p = \frac{-82}{13} + 5 = \frac{-17}{13} \qquad y_{p'} = 2y_s - y_p = \frac{-32}{13}$$

teda obraz P' bodu P v danej súmernosti má súradnice $P' = \left(\frac{-17}{13}, \frac{-32}{13}\right)$.

Ak bod Q so súradnicami $Q = (x; y)$ je bod dopadu lúča, potom platí:

$x - 2y + 5 = 0$

$\underline{3x - 2y + 7 = 0}$

$x = 2y - 5$; $\quad 6y - 15 - 2y + 7 = 0$

$y = 2$; $x = -1$

Teda $Q = (-1; 2)$.

Pre hľadanú priamku p' platí:

$$y - 2 = \frac{\frac{-32}{13} - 2}{\frac{-17}{13} + 1}(x+1)$$

$$y - 2 = \frac{-58}{-4}(x+1)$$

$$y - 2 = \frac{29}{2}(x+1) \quad \rightarrow \quad 29x - 2y + 33 = 0$$

Odrazený lúč leží na priamke p': $29x - 2y + 33 = 0$. (Parízek a kol., 1985)

Poznámka: Využili sme v príklade analytickú geometriu v rovine. Všeobecný tvar rovnice priamky je: $ax + by + c = 0$, kde *a, b* sú súradnice normálového vektora. Ďalej sme využili vlastnosť osovej súmernosti, t. j. $|PS| = |P'S|$, a tiež vzorec na výpočet vzdialenosti dvoch bodov: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Príklad 3

Z Bratislavy do Banskej Bystrice išlo nákladné auto priemernou rýchlosťou 30 km/h. Súčasne s ním vyšiel však aj autobus, ktorý mal priemernú rýchlosť 40 km/h a ktorý prišiel do Banskej Bystrice o 1 h a 45 minút skôr ako nákladné auto. Aká je vzdialenosť medzi Bratislavou a Banskou Bystricou? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

a) Riešme najskôr úlohu úvahou.

Každú hodinu predišiel autobus nákladné auto o *(40 – 30) = 10 km*

Keď dorazil autobus do Banskej Bystrice, nákladnému autu ešte ostávala 1 hodina a 45 minút do cieľa. Za ten čas prešlo *30. 1,75 = 52,5* km.

Vzdialenosť 52,5 km medzi týmito dvoma vozidlami sa získa za 52,5 : 10 = 5, 25 hodiny, pretože za každú hodinu predbehne autobus nákladné auto o 10 km.

Autobus teda išiel 5, 25 hodiny = 5 hodín a 15 minút. Za ten čas prešiel 210 km.

Vzdialenosť medzi Bratislavou a Banskou Bystricou je teda 210 km.

b) Riešme úlohu teraz rovnicou.

Vzdialenosť medzi mestami .... *x*

Autobus prejde vzdialenosť za .... $\frac{x}{40}$

Nákladné auto prejde vzdialenosť za .... $\frac{x}{30}$

Ak rozdiel v časoch je 1,75 hodiny, platí: $\frac{x}{30} - \frac{x}{40} = 1{,}75$

Rovnicu vynásobíme 120, čo je spoločný menovateľ zlomkov: *4x – 3x = 1,75 . 120*

x = 210

Vzdialenosť medzi Banskou Bystricou a Bratislavou je 210 km.

Príklad 4

Žiaci išli na výlet a za tri dni prešli 65 km. Prvý deň prešli dvakrát toľko ako tretí deň. Na druhý deň prešli o 10 km menej ako prvý deň. Koľko km prešli každý deň? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

a) Riešme úlohu úvahou.

Počet km prejdených prvý deň sa porovnáva s počtom km prejdených za tretí deň, preto si vezmeme počet km prejdených za tretí deň za základnú časť.

Prvý deň prešli dvojnásobok tretieho dňa, preto sa prvý deň rovná dvom základným častiam, čiže prvý a tretí deň spolu prešli tri základné časti.

Ak k počtu km prejdených za druhý deň pridáme 10 km dostaneme počet km, ktorý sa rovná počtu km prejdených za prvý deň. Teda spolu za všetky tri dni prešli 5 základných častí. Ale zmenil sa nám aj počet celkových km na 75.

Päťnásobok základnej časti je 75, z čoho dostávame že základná časť je 15.

Prvý deň prešli 30 km, druhý 20 a tretí deň prešli 15 km.

b) Riešme úlohu rovnicou.

Prešli: tretí deň................x

prvý deň.............$2x$

druhý deň...........$(2x - 10)$

spolu..................65

$$x + 2x + (2x - 10) = 65$$

$$5x = 75$$

$$x = 15$$

Prvý deň prešli 30 km, druhý 20 a tretí deň prešli 15 km.

Poznámka: V úlohách 3 a 4 sme poukázali na to ako využitie elementárnych výpočtov zjednoduší príklad a ušetrí čas aj zdĺhavé premýšľanie na dosiahnutie výsledku. Rovnice nám v tomto prípade zefektívnili a uľahčili samotné riešenie príkladu.

Príklad 5

Loptička spustená na zem sa odrazí do $\frac{2}{3}$ výšky, z ktorej bola spustená. Ak bola prvýkrát spustená z výšky 8,1 m, po koľkých odrazoch dosiahne výšku 1,6 m? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Po prvom odraze......... $8{,}1.\frac{2}{3}$

Po druhom odraze...... $8{,}1.\left(\frac{2}{3}\right)^2$

....

Po n -tom odraze........ $8{,}1.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Z podmienky nám vyplýva: $8{,}1.\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1{,}6$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1{,}6}{8{,}1}\left(=\frac{16}{81}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

V exponenciálnej rovnici sa základy rovnajú, a preto sa musia rovnať aj ich exponenty. Dostávame teda $n = 4$.

Loptička dosiahne výšku 1,6 m po 4 odrazoch.

Poznámka: V tomto príklade 5 sme použili exponenciálne rovnice. Sú to rovnice, ktoré majú neznámu v exponente. Príklad sme riešili tak, že sme si všetky mocniny v rovnici upravili na rovnaký základ, teda na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Keďže $a > 0$, $a \neq 1$ táto rovnica je ekvivalentná s rovnicou $f(x) = g(x)$. Z tejto rovnice sme sa už ľahko dopracovali k výsledku.

Príklad 6

Tri odpory $R_1 = x[\Omega]$, $R_2 = y[\Omega]$, $R_3 = z[\Omega]$ boli striedavo po dvoch zapojené paralelne a odmerané výsledné odpory boli $r_1 = 0{,}66\Omega$, $r_2 = 0{,}75\Omega$, $r_3 = 1{,}2\Omega$. Vypočítajte odpory R_1, R_2, R_3. (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Pre paralelne pospájané odporové drôty platí:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Vieme, že $\frac{1}{r_1} = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{r_2} = \frac{4}{3}$, $\frac{1}{r_3} = \frac{10}{12}$. Pre ľahšie počítanie si označme $\frac{1}{r_1} = a$, $\frac{1}{r_2} = b$, $\frac{1}{r_3} = c$.

Dosadíme do predchádzajúcich rovníc: $\frac{3}{2} = a + b$

$$\frac{4}{3} = a + c$$

$$\frac{10}{12} = b + c$$

Po úprave dostávame: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, z čoho $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Odpory sa rovnajú: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$.

Poznámka: V šiestom príklade sme použili sústavu troch lineárnych rovníc o troch neznámych. Danú sústavu môžeme riešiť sčítavacou alebo dosadzovacou metódou. Môžeme tiež počítať túto sústavu aj pomocou matíc, ale pri takýchto jednoduchých číslach je to neefektívne riešenie.

Príklad 7

Vo vode s teplotou 20 °*C* sa v priebehu 10 minút ochladí teleso zo 100 °*C* na 60 °*C* . Za aký čas sa ochladí na 30 °*C*, ak rýchlosť ochladzovania je úmerná rozdielu teploty telesa a teploty prostredia (t. j. vody)? (Varga, 2006)

Riešenie:

$T_P = 20°C$

$\Delta t = 10 \min$

Ochladenie $(100°C - 60°C)$

Ochladenie na $30°C$ za aký t ?

Zmena teploty za čas je závislá na rozdiely teploty telesa a prostredia, čo zapíšeme ako: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = k.(T_T - T_P)$, kde k je konštanta úmernosti, T_T je teplota telesa a $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ je rýchlosť zmeny teploty T v čase t.

$\frac{\Delta T}{\Delta t}$ môžeme napísať ako $\frac{dT}{dt}$ a po dosadení do rovnice dostávame: $\frac{dT}{dt} = k.(T - 20) \rightarrow$

$$\frac{1}{T-20} dT = k.dt \quad \rightarrow \quad \ln|T - 20| = kt + c \quad \rightarrow \quad T - 20 = L.e^{kt} \quad \rightarrow \quad T = L.e^{kt} + 20 \quad \rightarrow$$

$100 = L.e^{k.0} + 20 \;\rightarrow\; L = 80$

Dosadíme do rovnice $T = L.e^{kt} + 20$ počiatočné podmienky:

$T = 80.e^{kt} + 20$

$60 = 80.e^{10k} + 20$

$$\frac{1}{2} = e^{10k} \;\rightarrow\; k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{10}$$

Chceme zistiť, za aký čas sa teleso ochladí na 30 °*C*:

$$30 = 80.e^{t.\frac{\ln\frac{1}{2}}{10}} + 20 \;\rightarrow\; \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \rightarrow\; 3 = \frac{t}{10} \;\rightarrow\; t = 30$$

Teleso sa ochladí na 30 °*C* za 30 minút.

Poznámka: Využili sme poznatky o separovateľnej diferenciálnej rovnici. Jej všeobecný tvar je *p(x).q(y)dx + r(x).s(y)dy = 0.* Vynásobením rovnice výrazom $\frac{1}{q(y).r(x)}$ dostávame jednoduchú separovateľnú rovnicu, na ktorej výpočet sa využívajú integrály a vyjadrenie jednej premennej pomocou druhej.

Príklad 8

Dve cesty sa pretínajú pod pravým uhlom. Po jednej z nich ide nákladné auto rýchlosťou 40 km/h, po druhej ceste osobné auto rýchlosťou 80 km/h. Za aký čas budú autá od seba vzdialené 50 km ak z križovatky vyrazili súčasne? (Križalkovič a kol., 1971)

Riešenie:

Dráhy, po ktorých prešli autá, a tiež vzdialenosť medzi nimi tvoria pravouhlý trojuholník. Pre pravouhlý trojuholník platí Pytagorova veta. Ak si označíme hľadaný čas x, odvesny majú dĺžky $40x$ a $80x$.

Preto platí: $$(80x)^2 + (40x)^2 = 50^2$$

$$6400x^2 + 1600x^2 = 2500$$

$$x^2 = \frac{2500}{8000}$$

$$x = 0{,}3125 \quad (x = -\ 0{,}3125)$$

Záporný čas nevyhovuje riešeniu, a preto výsledok je x = 0,3125, čo je 18 minút a 45 sekúnd.

Poznámka: V príklade 8 sme využili poznatky o Pytagorovej vete pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník so stranami *a, b, c,* t. j. $a^2 + b^2 = c^2$. Jej geometrický význam je: Súčet obsahov trojuholníkov nad odvesnami sa rovná obsahu trojuholníka nad preponou. Prepona (najdlhšia strana trojuholníka) je oproti pravému uhlu a odvesny sú zvyšné dve strany.

2 Rôzne aplikácie matematiky v prírodovedných predmetoch

2.1 *Motivácia v prírodovedných predmetoch*

Aj keď sa snažíme študentov motivovať rôznymi aplikačnými úlohami (viď 1. kapitola), ani tie nie sú zárukou, že ich privedieme k väčšiemu záujmu o matematiku. Motivovať ich môžme napríklad aj netradičným vyučovaním, a tým ich aspoň trochu zaujať alebo upútať.

Ak chceme integrovať do vyučovacieho procesu aplikačné úlohy, dostávame sa k otázke, ako to urobiť. V tejto podkapitole sa pokúsime stručne načrtnúť, ako študentov trochu zaujať, a to nielen spomenutými aplikačnými úlohami, ale aj ich demonštrovaním.

Keď budeme riešiť napríklad úlohu z fyziky, ktorá v ktorej využívame vlastnosť *rovnosť uhlu dopadu a uhlu odrazu*, nie každý študent môže tomu veriť. Na to, aby sme ich presvedčili, nám stačí zrkadlo, uhlomer, pero, špagát, čistý papier, lepiaca páska a baterka. Môžeme im to prezentovať aj takto: na stenu nalepíme čistý papier a pomocou uhlomera nakreslíme uhly dopadu a uhly odrazu. Na ich prienik položíme zrkadlo a podľa uhlu dopadu naň zasvietime baterkou. Lúč sa odrazí od zrkadla presne do nakresleného uhla odrazu. Pre dôkaz, že to nie je len náhoda, môžeme nakresliť viac prípadov a demonštrovať platnosť zákona u všetkých daných možností.

V súčasnej modernej dobe je počítač neoddeliteľnou súčasťou každodenného života. Už na základných školách sa zaviedli hodiny venované práci na počítači a pre učiteľa by práca s ním mala byť samozrejmosťou. Spätný projektor študentov dnes asi už nezaujme, pokiaľ budú z neho len opisovať poznámky a jednoduché nákresy. Tu sa nám dostáva do popredia napríklad jednoduchá prezentácia v PowerPointe. Takto môžeme prezentovať na vyučovacej hodine viac zaujímavostí, použiť aj animácie, krátke filmy a podobne.

Na zdĺhavé riešenia príkladov môžeme využiť tiež interaktívnu tabuľu. Pre žiakov to ešte nie je také všedné ako „klasická“ tabuľa s kriedou a skoro každý študent si bude chcieť vyskúšať na nej pracovať. Ale aby mohli s ňou pracovať, musia vedieť riešiť daný problém, a to ich možno prinúti trochu porozmýšľať nad matematikou.

Aj keď žiaci na druhom stupni základnej školy alebo tiež študenti na strednej či vysokej škole si o sebe myslia, že sú veľkí na hry, ešte stále ich môžeme nejakou zaujať. Musí byť však dostatočne zaujímavá alebo neobvyklá. Uveďme príklad na konkrétnej úlohe: pri demonštrovaní maxima, či minima sa študenti pochytajú za ruky a na začiatku každý študent predstavuje nejaký interval. Ruky a hlava nech tvoria graf funkcie. Spolu tvoria celý interval, na ktorom je funkcia definovaná. Ak každý z nich predstavuje svoj vlastný interval, môže na sebe nájsť svoje globálne maximum. Na intervale celej skupiny študentov to však bude len lokálne maximum. Takto si každý študent nájde svoje maximum a môžeme úlohu sťažiť tak, že nechceme, aby hlava bola u každého maximum. Nájdeme aj globálne maximum „celoskupinového" intervalu. Podobne to môžeme urobiť aj s minimami. Ak sa táto metóda študentom nezdá veľmi lákavá, nemusia sa chytať za ruky. Stačí sa pozrieť na nejakú líniu pohoria, ktorú si zvolíme za interval a čiastkové intervaly budú samotné vrchy tohto pohoria. Študenti si ľahšie zapamätajú niečo názorne vysvetlené, ako keby sa to mali učiť z definícií a viet.

Spôsoby na zaujatie študentov sú rôzne. Všetko, čo nám pomôže lepšie a ľahšie vysvetliť dané učivo z matematiky, je potrebné zaradiť do vyučovacieho procesu. My sme spomenuli v tejto časti aspoň niekoľko možností.

2.2 *Biomatematika*

Biomatematika, alebo matematická biológia, je interdisciplinárna oblasť akademického štúdia, ktorej cieľom je modelovať prirodzené biologické procesy pomocou matematických techník a nástrojov. Má praktické aj teoretické aplikácie v biologickom výskume.

Príčiny prudkého záujmu o túto oblasť môžeme vidieť v náraste množstva dát pre genomickú revolúciu, ktorým je ťažké rozumieť bez použitia analytických nástrojov. Súčasný rozvoj matematických nástrojov, ako teória chaosu, pomáhajúcich porozumieť komplexným, nelineárnym mechanizmom v biológii, zvýšenie výkonov počítačov umožňujúce realizovať kalkulácie a simulácie, ktoré predtým neboli možné, a zvýšený záujem o experimentovanie in silico pre komplikácie spojené s ľudským a živočíšnym výskumom.

Model biologického systému sa konvertuje do systému rovníc, i keď slovo ,,model“ sa často používa ako synonymum so systémom korešpondujúcich rovníc. Riešenie rovníc, analytickými alebo numerickými prostriedkami, popisuje, ako sa biologický systém správa v čase alebo rovnováhe. Je mnoho rozličných typov rovníc a typov správania sa, ktoré sa môžu vyskytnúť, závisí to od modelu aj od použitia rovníc. Model často robí predpoklady o systéme. Rovnice tiež môžu robiť predpoklady o povahe toho, čo môže nastať. [18]

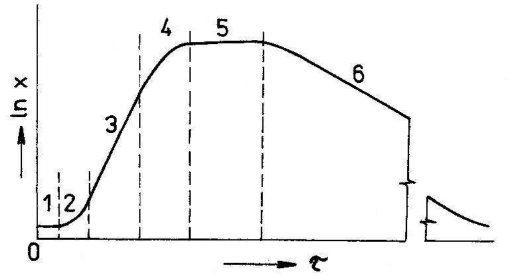
Profesor Nick Hill z Univerzity v Glasgowe rozpráva o výskume spojenom s ľudskými chorobami a ich liečením:

,,Modelujem skoré štádium aterosklerózy, presnejšie vnútornú hyperpláziu, v ktorej je spiatočný mechanizmus medzi priepustnosťou endotéliového obloženia artérie, absorbciou cholesterolu, narastaním obloženia steny artérie, ktoré tlačí endotélium do bunečnej dutiny artérie, a samotným tlakom vyvíjaným tokom krvi. Modelovanie bolo vykonávané s poradou s vaskulárnymi chirurgami zo St. Jameskej fakultnej nemocnice a fyziológmi z Imperial College. Hlavným cieľom je predpovedať účinky odporúčaného liečenia počas trvania ochorenia. Ja zároveň skúmam postup trhania vydutých brušných aort spolu s kolegami s vaskulárnej chirurgie z Leeds a nemocnice Good Hope v Birminghame. Oba projekty povedú k lepšiemu pochopeniu priebehu a postupu ochorení stien artérií.“ [19]

2.3 *Využitie logaritmov v biológii a chémii*

1. Rastová krivka

Rastová krivka (obrázok 3) vyjadruje závislosť logaritmu počtu buniek v jednotke objemu od času [10].



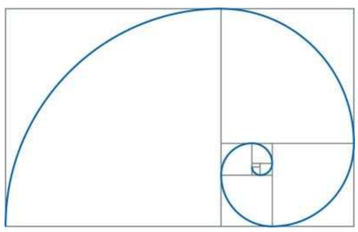
Obrázok 3: Rastová krivka [11]

1-lag fáza, 2-fáza zrýchleného rastu, 3-exponenciálna fáza, 4-fáza spomaleného rastu, 5-stacionárna fáza, 6-fáza odumierania, x- počet živých buniek v 1 ml, τ- čas.

V rámci matematickej analýzy rastu sa logaritmus využíva napríklad na vyjadrenie rýchlostnej konštanty: $\mu = \ln 2.r$, kde r je počet delení za jednotku času. [12]

2. Logaritmická špirála

Logaritmická špirála je krivka, ktorá rastie tak, že zachováva tvar a pomer častí, rastie rovnako do dĺžky i do šírky. Je to asymetrická krivka, ktorá vyjadruje symetrický rast. [13] Zostrojiť ju môžeme napríklad pomocou zlatého obdĺžnika, ktorého strany sú v pomere $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, (obrázok 4).



Obrázok 4: Schematický nákres logaritmickej špirály v zlatom obdĺžniku [14]

Takýto tvar môžeme pozorovať na ulitách, či na usporiadaní semien slnečnice. Dokonca aj hmyz sa pohybuje k svetlu po logaritmickej špirále, pretože sa pohybuje tak, aby videl svetlo stále pod rovnakým uhlom.

Obrázok 5: Ulity v tvare logaritmickej špirály [15]

3. Vyjadrenie vodíkového exponentu (pH)

Autoionizácia vody je dej, pri ktorom chemicky čistá voda obsahuje popri ,,celých“ molekulách vody aj niekoľko iónov H_3O^+ a OH^-. Presným meraním sa zistilo, že v 10 miliónoch litroch vody je ionizovaný len jeden mól molekúl vody [16].

Koncentrácia oxóniových katiónov a aniónov je potom $\left[H_3O^+\right] = \dfrac{1}{10000000} = 10^{-7}\, mol.dm^{-3}$, $\left[OH^-\right] = \dfrac{1}{10000000} = 10^{-7}\, mol.dm^{-3}$. Záporný dekadický logaritmus koncentrácie oxóniových katiónov nazývame pH: $pH = -\log\left[H_3O^+\right]$. Určujeme podľa neho kyslosť $\left(pH \in \langle 0,7)\right)$, neutrálnosť ($pH = 7$) a zásaditosť $\left(pH \in (7,14\rangle\right)$ vodných roztokov. [17]

3 Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo poukázať na aplikácie matematiky v rôznych prírodovedných predmetoch. V uvedených príkladoch sme sa snažili o riešenie rôznymi spôsobmi, od jednoduchej logickej úvahy až po použitie vyššej matematiky. Taktiež sme stručne uviedli niekoľko pomôcok a motivácií, ktoré by mohli uľahčiť prácu učiteľa na hodine matematiky. Tieto príklady ukazujú, aké je dôležité vedieť používať matematiku, pretože je potrebná všade okolo nás. Aplikačné úlohy tiež napomáhajú logicky uvažovať a vyberať si z nich podstatné informácie, ktoré budú potrebné na riešenie daného problému. Vycibriť pomocou nich tiež deduktívne myslenie, aby sme nemali problém využívať matematiku aj v praxi.

Bakalárska práca môže slúžiť napríklad ako zbierka úloh pre učiteľov matematiky, ale i iných prírodovedných predmetov a tým by sa mohli posilniť medzipredmetové vzťahy.

Zoznam použitej literatúry

[1] Križalkovič, K. – Cuninka, A. – Šedivý, O.: *500 riešených slovných úloh z matematiky*. Alfa Bratislava 1971, 364 s., ISBN: 63-002-71

[2] Šípek, M.: *Sbírka příkladů z chemie*. SNTL Praha 1974, ISBN: 04-605-74

[3] Varga, M.: *Dizertačná práca*, 2006

[4] Zaťková, M.: *Prečo (sa) učiť matematiku*, zborník príspevkov z 5. Žilinskej didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou-DIDZA, Žilina, 2008, CD, ISBN 978-80-8070-863-4

[5] Parízek, B. – Horniaček, J. - Galan, A. – Kollár, D.: Matematické úlohy na prijímacie skúšky na vysoké školy. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1985, 240 s., ISBN 67- 366- 85

[6] Vrábel, P. a kol.: Matematická analýza (cvičenia z diferenciálnych rovníc, z množného integrálu a teórie miery), PF, Nitra, 1991, ISBN 80- 85183- 27- 7

[7] Malachová, K. – Dobiáš, L.: Cvičení z genetiky, Repronis, Ostrava, 1998, 133 s., ISBN 80- 7042- 765- 5

[8] Kudriavcev, L.D.: Úvahy o súčasnej matematike a jej vyučovaní, SPN, Bratislava, 1990, 104 s., ISBN 80- 08- 00345- 6

[9] Batuner, L.M. - Pozim, M.E.: Matematické metódy v chémii, SVTL, Bratislava 1956

[10] Drábeková, J.: Výživa a rast mikroorganizmov. In: Marenčík a kol., 2003. Všeobecná mikrobiológia, vysokoškolské učebné texty, FPV UKF, Nitra, Edície prírodovedec č.120, 2003, 49-59, ISBN 80-8050-644-2

[11] Šilhánková, L.: Mikrobiologie pro potravináře a biotechnology, Praha, Academia, 2002, ISBN 80-200-1024-6

[12] Drábeková, J.- Pechočiak, T.: Rýchlosť rastu ako derivácia funkcie podľa času, zborník vedeckých prác z medzinárodného vedeckého seminára ,,Nové trendy v matematickom vzdelávaní", Katedra matematiky FEM SPU, Nitra, CD, 2008, 39-43, ISBN 978-80-552-0038-5

[13] Demová, A.: Zlatý rez okolo nás, zborník príspevkov Acta mathematica 8, FPV UKF, Nitra, Edícia prírodovedec č. 188, 2005, 161-170, ISBN 80-8050_644_2

[14] Zlatá spirála, obrázok 4, online cit. 2009-08-27, dostupné na internete: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/LogSpir/LogaritmickaSpiralaOdk.pdf

[15] Ulity, online obrázok, cit. 2009-08-27, dostupné na internete:
geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/obrazky.htm

[16] Vallo, D.: Matematika pre chemikov – pracovné listy z vybraných capitol, vysokoškolské skriptá, FPV UKF, Nitra, Edícia Prírodovedec č. 223, 2006, ISBN 80-8094-049-5

[17] Poláček, Š. – Tomáš, J. – Vollmanová, A. – Lazor, P. – Tóth, T.: Chemické názvoslovie, rovnice a výpočty, vysokoškolská príručka, SPU, Nitra, 2006, ISBN 80-8069-752-3

[18] http://sk.wikipedia.org/wiki/Biomatematika

[19] http://www.maths.gla.ac.uk/~nah/research_interests.html